



研究与开发

基于半正定松弛的到达频率差目标定位方法

毛晓婷, 吴晓平

(湖州师范学院信息工程学院, 浙江 湖州 313000)

摘要: 采用频率测量实现目标定位具有成本低、可靠性高的特点, 仅利用到达频率差 (frequency difference of arrival, FDOA) 测量, 提出了一种静态目标位置的精确定位方法。针对所建立的频率测量方程的高度非线性这一问题, 通过引入辅助变量, 将其转化为矩阵形式的伪线性方程; 然后利用半正定松弛 (semi-definite relaxation, SDR) 方法将非凸的加权最小二乘 (weighted least square, WLS) 问题松弛为半正定规划 (semi-definite programming, SDP) 问题, 从而进一步精确估计未知变量; 最后对所提出方法的均方根误差 (root-mean-square error, RMSE) 进行了分析, 以验证其性能。仿真结果表明, 在较低的高斯噪声水平下, 所采用的半正定松弛方法的性能能够达到克拉美罗下界 (Cramer-Rao lower bound, CRLB), 且该算法对几何形状具有较高的鲁棒性; 此外, 在使用较少数量的传感器时, 其 RMSE 性能要优于两阶段加权最小二乘 (two-stage weighted least square, TSWLS) 法。

关键词: 频率测量; 到达频率差; 半正定松弛; 半正定规划; 静态目标定位

中图分类号: TN929.5

文献标志码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2024076

Target localization method based on semi-definite relaxation with frequency difference of arrival

MAO Xiaoting, WU Xiaoping

School of Information Engineering, Huzhou University, Huzhou 313000, China

Abstract: The use of frequency measurements to achieve target positioning is characterized by low cost and high reliability. Using only frequency difference of arrival (FDOA) measurements, a precise localization method for static target position was proposed. To address the highly nonlinear of the established frequency measurement equation, it was transformed into a pseudo-linear equation in matrix form by introducing auxiliary variables. Then the non-convex weighted least squares (WLS) problem was relaxed into a semi-definite programming (SDP) problem by using the semi-definite relaxation (SDR) method, so as to further accurately estimate the position of unknown variables. Finally, the root mean square error (RMSE) of the proposed method was analyzed to verify its performance. The simula-

收稿日期: 2023-12-12; 修回日期: 2024-01-31

通信作者: 吴晓平, wuxipu@gmail.com

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (No.LY22F010016)

Foundation Item: Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (No.LY22F010016)

tion results show that the performance of the adopted semi-definite relaxation method is able to reach the Cramer-Rao lower bound (CRLB) at lower Gaussian noise levels and the algorithm is highly robust to geometry. In addition, its RMSE performance is better than that of the two-stage weighted least square (TSWLS) method for a smaller number of sensors.

Key words: frequency measurement, frequency difference of arrival, semi-definite relaxation, semi-definite programming, static target positioning

0 引言

随着智慧城市、无线通信以及数字电子技术的飞速发展,无线传感器网络(wireless sensor network, WSN)在相关应用领域具有举足轻重的地位。其中,WSN由大量被称为传感器节点(sensor node, SN)的小型设备组成,这些节点具有低成本、低功耗的特点且分布紧凑,因此被应用于环境监测、工业设备监测等不同的监测领域,并且可以在短距离内进行无线通信^[1-2]。因此,近几年,基于无线传感器网络来确定目标位置的问题受到研究人员的广泛关注。

众所周知,对目标物体进行定位是通过部署一些坐标已知的传感器,收集传感器与物体之间的某些测量信息,例如传感器观测到的发射信号的到达时间或频率,然后选择合适的定位算法来实现的。常用的定位测量方法有到达时间(time of arrival, TOA)^[3]、到达时间差(time difference of arrival, TDOA)^[4]、到达角度(angle of arrival, AOA)^[5]和接收信号强度(received signal strength, RSS)^[6]以及混合测量^[7]。其中,TOA和TDOA是与时间相关的距离测量方法,其测量信息是信号从目标到传感器的飞行时间(即测量距离)。它们的恒定飞行时间勾勒出一组圆或双曲线。因此,目标位置可以通过由几个“目标—传感器”对形成的测量时间轨迹的交点来估计。AOA和RSS常受较大噪声的影响,并且AOA的获取成本很高。此外,基于频率的测量方法,例如多普勒频移(Doppler frequency shift, DFS)^[8]和到达频率差(frequency difference of arrival,

FDOA)^[9],是在目标和传感器之间存在相对运动时所采用的测量方法,其包含目标或传感器的位置和速度信息。因此,频率测量不仅取决于物体的位置,还取决于物体的速度,并且这两个未知参数是耦合在一起的。所以,从算法关系式的角度,基于时间测量的目标定位要比频率测量更加直接。当使用静态设备或复杂度较低的设备时,通过TOA或TDOA等时间测量进行定位的性能表现良好,精度较高。然而,时间测量会受某些条件的限制,例如,TOA测量需要准确的时间戳,TDOA则要求传感器设备间保持同步。在水下环境中,保持时间同步具有一定的难度,通过频率测量与之相比则能以较低的成本实现更高精度的目标定位^[10]。此外,从发射信号的角度,当设备发射窄带信号或长脉冲持续时间信号^[11]时,频率测量具有较高的分辨率,定位更加准确。因此,在上述情况下,使用频率测量方法进行定位能更加准确地获得目标位置信息。然而,频率测量模型与目标位置和速度呈高度非线性,这使得仅采用频率测量的定位问题成为一个很大的挑战。

目前,基于TDOA的定位已经得到深入的研究^[12-13],但FDOA的定位研究却很少^[14]。在很大程度上是因为TDOA水平曲面是比较容易理解的双曲面,而FDOA的水平曲线和面要更加复杂。为此,在通常情况下,大多数研究者采用TDOA和FDOA相结合的测量方法^[15-18]进行定位,以简化模型所构建的方程,并使用极大似然估计(maximum likelihood estimation, MLE)^[19]、线性代数法^[20]和半正定松弛(semi-definite relax-



ation, SDR)^[21]等相关定位求解算法获得方程的解。其中,线性代数法通过引入辅助变量将非线性问题转化为伪线性形式后,根据加权最小二乘法(weighted least square, WLS)来表示未知源位置。但是引入的辅助变量是相互独立的,这导致WLS的求解精度较低。因此,文献[15,17]中提出了一种两阶段加权最小二乘(two-stage weighted least square, TSWLS)法,该方法的第二阶段利用第一阶段加权最小二乘(one-stage weighted least square, OSWLS)获得的估计值和估计误差,并结合辅助变量与未知变量间的约束关系来进一步精确未知变量估计。尽管如此,在较高的高斯噪声水平下,该方法的均方根误差(root mean square error, RMSE)会随着噪声的增加而逐渐偏离克拉美罗下界(Cramér-Rao lower bound, CRLB),即产生阈值效应,从而导致性能下降。

近年来,半正定松弛算法在目标定位领域被广泛应用。其方法是先将模型所构建的方程伪线性化,然后构造一个带约束的加权最小二乘(constrained weighted least square, CWLS)问题,最后利用SDR算法将非凸的CWLS问题松弛为一个凸的半正定规划(semi-definite programming, SDP)问题并应用凸优化工具包高效求解;然而,与线性代数法相比,凸优化算法的复杂度较高,计算时间长,但是凸优化能够实现变量间的约束从而提供更加精确的估计结果。因此,Wang等^[16]首先基于鲁棒最小二乘来重新表述定位问题,然后利用SDR方法进行求解;仿真结果表明该方法有较好的鲁棒性,其性能可在较高的高斯噪声水平下接近CRLB精度。考虑网格搜索法和泰勒展开式这两种方法受成本和初始值设置的影响,Zou等^[18]提出了一种迭代的方法,首先利用SDR方法将MLE问题松弛为一个凸的SDP问题,从而获得要估计的目标位置和速度参数,并作为初始值,然后利用初始值使用WLS更新速度估

计值,接着再通过SDR获得最终的位置估计,以此提高估计精度。

然而,不同于上述文献[15-18],本文没有结合TDOA测量方法,而是参考文献[22],在二维空间下仅采用FDOA测量并基于SDR算法来提高静态目标定位的求解精度。这是因为所提出的技术对估计信号的载波频率偏差的敏感性低于直接使用多普勒频移测量。此外,本文还将文献[14]中的高斯-牛顿迭代法(Gauss-Newton iteration method, G-Newton)应用到所提模型中。经对比,SDR方法在较小的高斯噪声范围内,其均方根误差更加接近CRLB。与此同时,该方法在使用更少的传感器的情况下,精度优于TSWLS方法,并且对传感器速度变化不敏感,对几何形状具有较高的鲁棒性,因此其性能在整体上优于文献[22]中提出的TSWLS方法。

本文的数学符号较多,根据惯例将它们表示如下:用粗体小写字母表示列向量,则在二维空间下表示为 $\mathbf{a}=[x, y]^T$;用粗体大写字母表示矩阵,即 $\mathbf{A}$ 。然后分别用符号 $(\mathbf{A})^{-1}$ 和 $(\mathbf{A})^T$ 表示 $\mathbf{A}$ 矩阵的逆运算和转置运算,用符号 $\mathbf{a} \odot \mathbf{a}$ 表示向量的元素乘积运算;此外,矩阵的二范数运算用 $\|\mathbf{A}\|$ 表示。用 $\mathbf{a}_{(i)}$ 表示向量 $\mathbf{a}$ 的第 i 个元素, $\mathbf{A}_{(i,j)}$ 表示矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行和第 j 列元素。 $\mathbf{I}_n$ 表示维度为 $n \times n$ 的单位矩阵。 $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 代表 $\mathbf{a}$ 到 $\mathbf{b}$ 的单位向量,表示为 $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|}$ 。 $\nabla_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ 代表 $\mathbf{a}$ 对 $\mathbf{b}$ 的偏导数,具体用 $\nabla_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}}$ 表示。 $\text{tr}(\mathbf{A})$ 和 $\text{rank}(\mathbf{A})$ 分别代表 $\mathbf{A}$ 的迹和秩,此外 $\mathbf{A} \succeq 0$ 意味着矩阵 $\mathbf{A}$ 是半正定的。

1 问题描述

假设在二维空间下($k=2$),使用 N 个移动传感器对静态目标仅采用到达频率差测量方法进行定位,基于FDOA测量的静态目标定位如图1所示。其中移动传感器的位置和速度定义为已知

的, 并分别用向量 $\mathbf{s}_i = [x_i, y_i]^T$ 和 $\dot{\mathbf{s}}_i = [\dot{x}_i, \dot{y}_i]^T$ 表示, 其中 $i=1, 2, \dots, N$ 。待估计的目标位置则表示为 $\mathbf{u}^o = [x^o, y^o]^T$ 。传感器与估计目标之间存在相对运动, 从而产生多普勒效应。假设 $\|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i\|$ 为目标与第 i 个传感器之间的欧氏距离; 因此, 第 i 个传感器的多普勒频率真实值表示为:

$$f_i^o = -\rho_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i \quad (1)$$

其中, $\rho_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_i}^T = \frac{(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i)^T}{\|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i\|}$, $i=2, 3, \dots, N$ 。

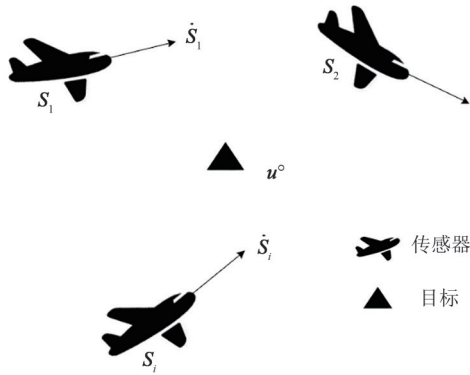


图1 基于FDOA测量的静态目标定位

不失一般性, 假设选择第 1 个传感器作为参考, 由此得到第 i 个传感器与参考传感器之间的 FDOA 真实值, 有以下计算式:

$$f_{i,1}^o = f_i^o - f_1^o \quad (2)$$

在实际测量场景中, 由于噪声的存在, 测量值需要加上额外的噪声 $\Delta f_{i,1}$, 表示为:

$$f_{i,1} = f_{i,1}^o + \Delta f_{i,1}, \quad i=2, 3, \dots, N \quad (3)$$

将式 (3) 中的所有等式合并构成矩阵形式, 表示为:

$$\mathbf{f} = [f_{2,1}, f_{3,1}, \dots, f_{N,1}]^T = \mathbf{f}^o + \Delta \mathbf{f} \quad (4)$$

其中, $\Delta \mathbf{f} = [\Delta f_{2,1}, \Delta f_{3,1}, \dots, \Delta f_{N,1}]^T \in \mathbf{R}^{N-1}$, 可以假设噪声项 $\Delta \mathbf{f}$ 服从均值为零, 且协方差矩阵为 $\sum_f$ 的高斯分布。

上述所提出的静态目标定位模型是利用

FDOA 测量方法, 即等式 (3) 来估计未知目标位置 $\mathbf{u}$, 但是 FDOA 的表达式是高度非线性的, 难以精确求解。因此下文将详细阐述如何将等式 (3) 转变为矩阵形式的伪线性方程, 并根据半正定松弛方法来求解未知的目标位置。

2 静态目标定位的半正定松弛方法

本文的目标是仅使用 FDOA 测量方法来估计静态源的位置。由于 FDOA 的高度非线性, 因此引入辅助变量, 将其构造成伪线性方程的矩阵形式, 从而将非线性的定位问题转化为 CWLS 问题, 然后采用 SDR 方法来求解。

首先, 将式 (1) 代入式 (2) 中, 并将 f_1^o 移到等式左边得到:

$$f_{i,1}^o + f_1^o = -\rho_{\mathbf{u}^o, \mathbf{s}_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i \quad (5)$$

为了简便, 对式 (5) 两边同乘 $\|\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i\|$ 后再取平方, 可以得到:

$$(\mathbf{u}^{oT} \mathbf{u}^o + \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - 2\mathbf{s}_i^T \mathbf{u}^o)(f_{i,1}^{o2} + f_1^{o2} + 2f_{i,1}^o f_1^o) = (\mathbf{u}^{oT} \dot{\mathbf{s}}_i)^2 + (\dot{\mathbf{s}}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i)^2 - 2\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i \dot{\mathbf{s}}_i^T \mathbf{u}^o \quad (6)$$

其中, $(\mathbf{u}^{oT} \dot{\mathbf{s}}_i)^2$ 的值表示为:

$$(\mathbf{u}^{oT} \dot{\mathbf{s}}_i)^2 = \dot{x}_i^2 x^{o2} + \dot{y}_i^2 y^{o2} + 2\dot{x}_i \dot{y}_i x^o y^o \quad (7)$$

考虑到额外噪声的存在, 对式 (3) 进行变形得到 $f_{i,1}^o = f_{i,1} - \Delta f_{i,1}$, 然后与式 (7) 一起代入式 (6) 中。

由于噪声处于较小波动范围, 并且由噪声项构成的权重矩阵对未知参数的求解不敏感, 因此二次噪声项可以忽略不计, 从而得到下列计算式:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i)^2 + f_{i,1}^2 \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - 2(\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i \dot{\mathbf{s}}_i^T - f_{i,1}^2 \mathbf{s}_i^T) \mathbf{u}^o + \\ & 2\dot{x}_i \dot{y}_i x^o y^o - (f_{i,1}^2 - \dot{x}_i^2) x^{o2} - (f_{i,1}^2 - \dot{y}_i^2) y^{o2} - \\ & (2f_{i,1} \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i) f_1^o - (\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i) f_1^{o2} + (4f_{i,1} \mathbf{s}_i^T) \mathbf{u}^o f_1^o + \\ & (2\mathbf{s}_i^T) \mathbf{u}^o f_1^{o2} - (2f_{i,1}) \mathbf{u}^{oT} \mathbf{u}^o f_1^o - \mathbf{u}^{oT} \mathbf{u}^o f_1^{o2} \approx \\ & -2f_{i,1}^o d_i^2 \Delta f_{i,1} \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $d_i^2 = \mathbf{u}^{oT} \mathbf{u}^o + \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - 2\mathbf{s}_i^T \mathbf{u}^o$ 。



为了构造关于式 (8) 的伪线性方程, 假设未知向量为:

$$\alpha = [u^{oT}, \beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T, \beta_4^T]^T \in \mathbf{R}^{L_1} \quad (9)$$

其中, $L_1=13$, 除了 u^o 是本文所要估计的未知目标位置, 其余的都是辅助变量, 它们具体表示为:

$$\beta_1 = [x^o, y^o, x^{o2}, y^{o2}]^T \quad (10a)$$

$$\beta_2 = [f_1^o, f_1^{o2}]^T \quad (10b)$$

$$\beta_3 = [u^o f_1^o, u^o f_1^{o2}]^T \quad (10c)$$

$$\beta_4 = [u^{oT} u^o f_1^o, u^{oT} u^o f_1^{o2}]^T \quad (10d)$$

那么辅助变量与定义的未知参数 u^o 之间的约束关系可以用未知向量 α 来表示:

$$\alpha_{(3)} = \alpha_{(1)} \alpha_{(2)}, \alpha_{(4)} = \alpha_{(1)} \alpha_{(1)} \quad (11a)$$

$$\alpha_{(5)} = \alpha_{(2)} \alpha_{(2)}, \alpha_{(7)} = \alpha_{(6)} \alpha_{(6)} \quad (11b)$$

$$\alpha_{(8:9)} = \alpha_{(1:2)} \alpha_{(6)}, \alpha_{(10:11)} = \alpha_{(1:2)} \alpha_{(7)} \quad (11c)$$

$$\alpha_{(12)} = \alpha_{(1:2)}^T \alpha_{(8:9)}, \alpha_{(13)} = \alpha_{(1:2)}^T \alpha_{(10:11)} \quad (11d)$$

特别地, 本文将参考传感器的多普勒频率真实值假设为未知量, 有表达式:

$$f_1^o = - \frac{(u^o - s_1)^T \dot{s}_1}{\|u^o - s_1\|} \quad (12)$$

因此, 依照上述同样的方法对式 (12) 两边同乘 $\|u^o - s_1\|$ 后取平方, 代入式 (7) 并用 $\alpha_{(i)}$ 来表示未知量, 可以得到约束关系式:

$$\alpha_{(13)} + s_1^T s_1 \alpha_{(7)} - 2s_1^T \alpha_{(10:11)} = \alpha_{(4:5)} \gamma_1 + 2\gamma_2 \alpha_{(3)} + (s_1^T \dot{s}_1)^2 - 2s_1^T \dot{s}_1 \alpha_{(1:2)} \quad (13)$$

其中, $\gamma_1 = \dot{s}_1 \odot \dot{s}_1$, $\gamma_2 = \dot{s}_{1(1)} \dot{s}_{1(2)}$ 。

此外, 受文献[23]的启发, 可以利用 Cauchy-Schwartz 不等式来收紧约束 (12), 即:

$$f_1^{o2} \leq \|\dot{s}_1\|^2 \quad (14)$$

同样地, 用未知向量 α 将不等式 (14) 改写为:

$$\alpha_{(7)} \leq s_1^T \dot{s}_1 \quad (15)$$

接着, 对式 (8) 进行整理, 得到矩阵形式的伪线性方程:

$$h - Ga = B\Delta f \quad (16)$$

其中, 矩阵维度分别为 $h \in \mathbf{R}^{(N-1) \times 1}$, $G \in \mathbf{R}^{(N-1) \times L_1}$, $B \in \mathbf{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, 它们具体的计算式描述为:

$$\begin{aligned} [h]_{i,1} &= (s_i^T \dot{s}_i)^2 - f_{i,1}^2 s_i^T s_i \\ [G]_{i,1:2} &= 2(s_i^T \dot{s}_i s_i^T - f_{i,1}^2 s_i^T) \\ [G]_{i,3:5} &= [-2\dot{x}_i \dot{y}_i, f_{i,1}^2 - \dot{x}_i^2, f_{i,1}^2 - \dot{y}_i^2] \\ [G]_{i,6:7} &= [2f_{i,1} s_i^T s_i, s_i^T s_i] \\ [G]_{i,8:13} &= [-4f_{i,1} s_i^T, -2s_i^T, 2f_{i,1}, 1] \\ [B]_{i,i} &= -2f_i^o d_i^2 \end{aligned} \quad (17)$$

根据式 (16), 将其转化为一个带约束的加权最小二乘 (CWLS) 问题, 如下:

$$\begin{aligned} \min_a & (h - Ga)^T W^{-1} (h - Ga) \\ \text{s.t.} & (11a) \sim (11d), (13), (15) \end{aligned} \quad (18)$$

其中, 权重矩阵 W 近似等于式 (16) 中噪声项的协方差矩阵, 即 $W = E[B\Delta f \Delta f^T B^T] = (B \sum_f B^T)$ 。

至此, 问题 (18) 仍然是一个难以获得全局最优解的非凸问题, 所以要利用半正定松弛方法将式 (18) 松弛为凸形式的半正定规划问题。那么, 需要引入一个未知矩阵 $X = \begin{bmatrix} aa^T & a \\ a^T & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $X \in \mathbf{R}^{L_2 \times L_2}$, $L_2 = L_1 + 1$, 且矩阵 X 满足以下条件:

$$X \succeq 0, [X]_{L_2, L_2} = 1 \quad (19a)$$

$$\text{rank}(X) = 1 \quad (19b)$$

由于未知矩阵 X 的引入, 约束条件 (11) 被重新改写为与 X 有关的计算式, 如下:

$$X_{(3, L_2)} = X_{(1, 2)}, X_{(4, L_2)} = X_{(1, 1)} \quad (20a)$$

$$X_{(5, L_2)} = X_{(2, 2)}, X_{(7, L_2)} = X_{(6, 6)} \quad (20b)$$

$$X_{(8:9, L_2)} = X_{(1:2, 6)}, X_{(10:11, L_2)} = X_{(1:2, 7)} \quad (20c)$$

$$X_{(12, L_2)} = \text{tr}(X_{(1:2, 8:9)}), X_{(13, L_2)} = \text{tr}(X_{(1:2, 10:11)}) \quad (20d)$$

同样地, 约束条件 (13) 被重新表述为:

$$\begin{aligned} & \text{tr}(X_{(1:2, 10:11)}) + s_1^T s_1 X_{(6, 6)} - 2s_1^T X_{(1:2, 7)} = \\ & \gamma_1^T X_{(4:5, m)} + 2\gamma_2 X_{(1, 2)} + (s_1^T \dot{s}_1)^2 - 2s_1^T \dot{s}_1 s_1^T X_{(1:2, m)} \end{aligned} \quad (21)$$

约束 (15) 则表述为:

$$\mathbf{X}_{(6,6)} \leq \dot{\mathbf{s}}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 \quad (22)$$

这样, CWLS 问题——式 (18) 就可以被重新定义为如下形式:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & (19\text{a}), (19\text{b}), \\ & (20\text{a}) \sim (20\text{d}), (21), (22) \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G} & -\mathbf{G}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{h} \\ -\mathbf{h}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{G} & \mathbf{h}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{h} \end{bmatrix}$ 。由于约束 (19b) 的存在, 问题 (23) 仍然是非凸形式的, 因此不考虑此约束可以得到 SDP 问题 (24):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}} \quad & \text{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{X}) \\ \text{s.t.} \quad & (19\text{a}), (20\text{a}) \sim (20\text{d}), \\ & (21), (22) \end{aligned} \quad (24)$$

由此, 可以利用 SEDUMI 和 SDPT3 等凸优化包, 对式 (24) 进行求解, 并通过式 (25) 提取得到未知目标位置的估计值 $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}_{(1:2)} \quad (25)$$

然而, 上文最终得到的 SDP 问题——式 (24) 中, 矩阵 $\mathbf{Z}$ 的计算需要权重矩阵 $\mathbf{W}$ 的值, 而矩阵 $\mathbf{W}$ 中包含噪声项的系数矩阵 $\mathbf{B}$, 显然, 由式 (17) 可知, 系数矩阵 $\mathbf{B}$ 中的目标位置 $\mathbf{u}$ 是本文所要估计的未知参数, 这意味着暂时无法获得权重矩阵 $\mathbf{W}$ 的具体值。由于求解 SDP 问题对权重矩阵 $\mathbf{W}$ 的值并不敏感, 因此, 本文首先将 $\mathbf{W}$ 设置为单位矩阵, 从而获得 $\mathbf{u}$ 的粗略估计。在小噪声范围内, 粗略估计值与真实值是足够接近的, 随后可以利用粗略估计值生成权重矩阵 $\mathbf{W}$, 并最终得到未知参数 $\mathbf{u}$ 的精确解。

3 性能分析

3.1 克拉美罗下界分析

克拉美罗下界为任何无偏估计量的方差确定了下限, 因此在低高斯噪声水平下, 可以用于评估未知参数估计的性能。本文所提出的问题仅包含一个未知参数 $\mathbf{u}^o = [x^o, y^o]^T$ 。因此, 根据

式 (3), 将问题的第 i 个 FDOA 测量误差值定义为 ε_i , 即:

$$\varepsilon_i = f_i^o - f_1^o - f_{i,1}, \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (26)$$

其中, $f_i^o = -\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{u}^o, s_i}^T \dot{\mathbf{s}}_i$, $f_1^o = -\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{u}^o, s_1}^T \dot{\mathbf{s}}_1$ 。

将式 (26) 中所有测量误差的集合以向量的形式表示为 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_N]^T \in \mathbf{R}^{N-1}$ 。那么, 以 $\mathbf{u}^o$ 为参数的概率密度函数可以由下列计算式定义为:

$$\ln p(\mathbf{u}^o) = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \sum_f^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (27)$$

其中, $\sum_f$ 为噪声的协方差矩阵。

因此, 根据费希尔 (Fisher) 信息矩阵, 未知目标位置 $\mathbf{u}^o$ 的 CRLB 表示为:

$$\begin{aligned} \text{CRLB}(\mathbf{u}^o) = & -\mathbf{E} \left[\frac{\partial^2 (\ln p(\mathbf{u}^o))}{\partial \mathbf{u}^o \partial \mathbf{u}^{oT}} \right]^{-1} = \\ & \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^T}{\partial \mathbf{u}^o} \sum_f^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}^o} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

其中, 令 $\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}^o} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{u}^o}$, 则其计算式为:

$$[\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}^o}]_{k, 1:2} = \frac{f_1^o(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_1)}{d_1^2} + \frac{\dot{\mathbf{s}}_1}{d_1} - \frac{f_i^o(\mathbf{u}^o - \mathbf{s}_i)}{d_i^2} - \frac{\dot{\mathbf{s}}_i}{d_i} \quad (29)$$

3.2 均方误差分析

根据文献[24]可知, 由于 $\mathbf{G}$ 是列满秩的, 所以本文所提 SDR 方案的解等同于原始 CWLS 问题——式 (18) 的最优解, 因此直接从式 (18) 中导出估计 $\mathbf{u}^o$ 的均方误差: 首先将 $\mathbf{u}^o$ 的估计误差表示为 $\Delta \mathbf{u}^o$, 那么有如下计算式:

$$\frac{\partial(\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}^T} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{u}^o} \Delta \mathbf{u}^o \approx \mathbf{B} \Delta \mathbf{f} \quad (30)$$

根据式 (30), 令 $\mathbf{J}_{\mathbf{u}^o} = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{u}^o}$, 那么其具体的计算式为:

$$[\mathbf{J}_{\mathbf{u}^o}]_{1:2, 1:2} = \mathbf{I}_2, [\mathbf{J}_{\mathbf{u}^o}]_{3, 1:2} = [y^o, x^o] \quad (31\text{a})$$



$$[J_{u^o}]_{4:5, 1:2} = \begin{bmatrix} 2x^o & 0 \\ 0 & 2y^o \end{bmatrix} \quad (31b)$$

$$[J_{u^o}]_{6:7, 1:2} = \eta_1 \frac{\partial f_1^o}{\partial u^{oT}} \quad (31c)$$

$$[J_{u^o}]_{8:9, 1:2} = u^o \frac{\partial f_1^o}{\partial u^{oT}} + f_1^o I_2 \quad (31d)$$

$$[J_{u^o}]_{10:11, 1:2} = 2f_1^o u^o \frac{\partial f_1^o}{\partial u^{oT}} + f_1^{o2} I_2 \quad (31e)$$

$$[J_{u^o}]_{12:13, 1:2} = 2\eta_2 u^{oT} + \eta_3 \frac{\partial f_1^o}{\partial u^{oT}} \quad (31f)$$

其中:

$$\frac{\partial f_1^o}{\partial u^{oT}} = -\frac{f_1^o(u^o - s_1)^T}{d_1^2} - \frac{\dot{s}_1^T}{d_1} \quad (32a)$$

$$\eta_1 = [1, 2f_1^o]^T, \eta_2 = [f_1^o, f_1^{o2}]^T \quad (32b)$$

$$\eta_3 = [u^{oT} u^o, 2u^{oT} u^o f_1^o] \quad (32c)$$

因此, 式(30)可以重新表示为:

$$GJ\Delta u^o \approx B\Delta f \quad (33)$$

令 $A = GJ$, 进而得到式(33)的WLS解:

$$\Delta u^o = (A^T W^{-1} A)^{-1} A^T W^{-1} B \Delta f \quad (34)$$

那么, 从问题(18)中导出的估计目标位置 u^o 的MSE理论值为:

$$\text{MSE}_{th}(u^o) = (A^T W^{-1} A)^{-1} \quad (35)$$

接着代入 $W^{-1} = (B \sum_f B^T)^{-1}$, 式(35)又可以表示为:

$$\text{MSE}_{th}(u^o) = ((B^{-1} A)^T \sum_f^{-1} B^{-1} A)^{-1} \quad (36)$$

然后根据式(17)中 G 和 B 的定义, 将两者直接相乘得到:

$$[B^{-1} G]_{i, 1:3} = [-p_i (s_i^T \dot{s}_i \dot{s}_i^T - f_{i,1}^2 s_i^T), p_i \dot{x}_i \dot{y}_i]$$

$$[B^{-1} G]_{i, 4:5} = [-\frac{1}{2} p_i (f_{i,1}^2 - \dot{x}_i^2), -\frac{1}{2} p_i (f_{i,1}^2 - \dot{y}_i^2)]$$

$$[B^{-1} G]_{i, 6:7} = [-p_i f_{i,1} s_i^T s_i, -\frac{1}{2} p_i s_i^T s_i]$$

$$[B^{-1} G]_{i, 8:13} = [2p_i f_{i,1} s_i^T, p_i s_i^T, -p_i f_{i,1}, -\frac{1}{2} p_i] \quad (37)$$

其中, $p_i = (f_i^o d_i^2)^{-1}$ 。然后将式(37)与式(31)中 J 的计算式相乘, 就可以验证 $B^{-1} GJ \approx \frac{\partial \varepsilon}{\partial u^o}$, 那

么最终会得到 $\text{MSE}_{th}(u^o) \approx \text{CRLB}(u^o)$, 这意味着在较低的高斯噪声水平下, 本文SDP解的理论均方误差值 MSE_{th} 能够接近克拉美罗下界。

3.3 复杂度分析

在文献[22]中提出了仅使用FDOA测量方法来定位静态目标的两阶段加权最小二乘法, 本文所提出的半正定松弛算法是该模型的改进方法, 因此在本节中对两种算法的复杂度进行了比较。根据文献[25], 求解半正定规划问题的最低复杂度为:

$$O((m^2 \sum_{i=1}^{N_{sd}} (n_i^{sd})^2 + m \sum_{i=1}^{N_{sd}} (n_i^{sd})^3 + m^3) \delta) \quad (38)$$

其中, $\delta = \sqrt{\psi} \log(\frac{1}{\varsigma})$, m 是等式约束的数量, N_{sd} 是SDP锥的个数, n_i^{sd} 为第 i 个SDP锥的维度, $\psi = \sum_{i=1}^{N_{sd}} n_i^{sd}$ 是由所谓的屏障参数引起的迭代次数, 最后 ς 表示SDP问题的求解精度。而加权最小二乘法的复杂度为:

$$O(2m^2 n + mn^2 + mn + n^3 + n^2) \quad (39)$$

其中, m 和 n 分别表示WLS中方程的数目以及未知变量的维度。

根据上述复杂度计算式, 得到两种方法与复杂度有关的参数, 其中半正定松弛方法与复杂度有关的参数见表1, 两阶段加权最小二乘法与复杂度有关的参数见表2。由此, 考虑在二维空间下($k=2$), 根据表中参数, 计算得到两种方法的复杂度分别为:

$$C_{SDR} \approx O(48\ 040 \sqrt{14} \ln(\frac{1}{\varsigma})) \quad (40a)$$

$$C_{OSWLS} \approx O(26(N-1)(N+6) + 2\ 366) \quad (40b)$$

$$C_{TSWLS} \approx O(766) \quad (40c)$$

由式(40a)~式(40c)可知, SDR方法的计算复杂度较高, 因此它与TSWLS方法相比需要更大的计算量, 但是SDR方法在性能方面具有更大的优势; 当噪声水平逐渐增大时, SDR方法的目标位置均方根估计误差更接近CRLB, 这将

表1 半正定松弛方法与复杂度有关的参数

方案	m	N_{sd}	n_i^{sd}
半正定松弛 (SDR)	10	1	L_2

表2 两阶段加权最小二乘法与复杂度有关的参数

方案	m	n
第一阶段加权最小二乘 (OSWLS)	$N-1$	L_1
第二阶段加权最小二乘 (TSWLS)	L_1	k

在第4节中得到验证。

4 仿真分析

本节在二维场景下,通过仿真实验来评估所提出的半正定松弛 (SDR) 方法的性能;其中传感器的配置与文献[22]中的参数保持一致,即传感器数量 N 为 16,传感器的位置在 $(-2\ 000, 2\ 000)$ m 的区间内随机生成,速度在 $(-15, 25)$ m/s 的区间内随机生成,传感器的位置见表 3,传感器的速度见表 4。

表3 传感器的位置/m

编号	x_i	y_i	编号	x_i	y_i
1	-1 135	-1 872	9	-1 828	191
2	1 214	-1 843	10	-1 995	899
3	964	-643	11	475	-511
4	-336	-1 225	12	-824	-1 780
5	1 789	-1 458	13	803	1 572
6	-123	1 406	14	904	342
7	-1 013	-274	15	1 809	-557
8	1 977	1 711	16	-1 635	-52

此外,噪声的协方差矩阵定义为 $\sum_f = \sigma^2 \mathbf{I}$ 。利用 MATLAB 工具箱 CVX 求解 SDP 问题,其中求解器为 SEDUMI,然后根据目标位置的均方根估计误差来评估性能,其定义表示如下:

$$\text{RMSE}(\mathbf{u}) = \left[\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \|\mathbf{u}^l - \mathbf{u}^o\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

其中, $L=2\ 000$ 为蒙特卡罗运行次数, $\mathbf{u}^l$ 为第 l 次运行时所获得的目标位置值。

表4 传感器的速度/(m·s⁻¹)

编号	$\dot{x}_i$	$\dot{y}_i$	编号	$\dot{x}_i$	$\dot{y}_i$
1	2	-13	9	2	11
2	-4	15	10	22	3
3	-3	-10	11	8	18
4	22	-13	12	1	20
5	24	-8	13	23	0
6	-1	10	14	-15	-22
7	7	10	15	8	7
8	-8	8	16	12	-24

对此,本文将与文献[22]中的 TSWLS 方法进行对比,同时还将现有的高斯-牛顿迭代法^[14]应用到所提模型中。具体分为 4 个场景:噪声变化、目标位置变化、传感器速度变化和传感器数量变化。由此可以看出,在较高的高斯噪声水平或使用较少的传感器下,本文所提 SDR 方法的性能优于 TSWLS 方法;同时,该算法对于传感器速度变化不敏感,对几何形状具有较高的鲁棒性。

4.1 噪声变化对均方根估计误差的影响

众所周知,定位误差会随着噪声的增大而增大,从而导致各种算法的性能表现逐渐下降。由于 SDR 算法考虑了变量之间严格的约束关系,因此在理论上该算法的估计误差小于其他算法,具有更高的抗噪声干扰的能力。对此,将所提 SDR 方法在不同的噪声水平下与其他算法进行对比测试以评估噪声变化下的性能优势。在此场景下,将噪声方差的对数值 $10\lg\sigma^2$ 设置在 $[-35, 15]$ 的区间内,采用表 3 和表 4 中 16 个传感器的位置和速度参数,并设置目标位置 $\mathbf{u}^o$ 为 $[400, 300]^T$ 。从图 2 可以看出,OSWLS 的 RMSE 始终无法达到 CRLB 精度。由于 TSWLS 根据第一阶段获得的解进行进一步的精确估计,所以当噪声值小于 -10 时,除了 OSWLS 以外,其他 3 种算法的性能都充分接近 CRLB 精度;但是当噪声值大于 -10 并逐渐增大时,TSWLS 算法和高斯-牛顿迭代法 (G-Newton) 的 RMSE 开始逐渐偏离,而 SDR 算法由于有严格的约束限制,其 RMSE 在相比之下



能够更加接近CRLB精度。虽然牛顿迭代法对于初始值的设置比较敏感,但是在该仿真实验中将初始值设置在理想范围,因此其性能在低噪声范围内,也表现良好。综上所述,所提出的SDR算法在噪声变化时,特别是高噪声范围内,其性能表现胜过其他算法。

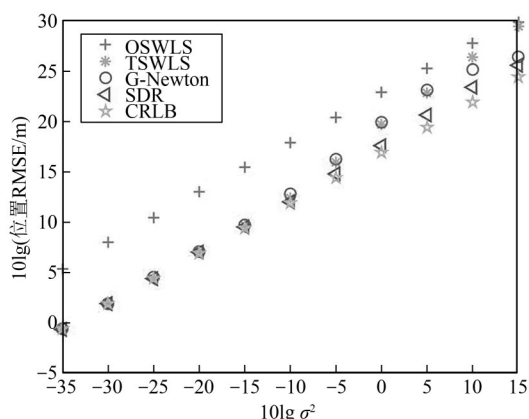


图2 噪声变化对均方根估计误差的影响

4.2 目标位置变化对均方根估计误差的影响

根据目标位置的不同,传感器与其相关的几何形状随之改变,因此各算法对目标位置的估计误差也会受影响。当目标远离传感器附近,意味着可能与传感器几乎共线时,传统的方法通常无法可靠地处理这种几何形状导致定位精度下降。对此,本节在目标位置变化的场景下同样采用表3和表4中的16个传感器的位置和速度参数来评估SDR算法的性能;其中,设置目标位置的坐标在 $(-1\ 000, 1\ 000)$ m的区间内随机生成,目标的位置见表5。此外,噪声值 $10\lg\sigma^2$ 设置为固定的-15。因此,目标位置变化对均方根误差的影响如图3所示;其中,问题的CRLB随着目标位置的变化而变化;OSWLS的RMSE在任意的目标位置下都无法达到CRLB精度;TSWLS性能略有提升,但其RMSE只有在编号分别为1和7的目标位置下接近CRLB,其余的都随着目标位置的变化而产生了阈值效应。反观SDR算法,其性能在不同位置下都充分接近CRLB。而G-Newton

相较于TSWLS,性能有明显提升,但在编号分别为3、6、8的目标位置下,性能与SDR相比还存在较大差距。这证实了SDR求解算法在目标位置多样化的情况下的性能优势,也侧面反映了在较差的几何定位场景下SDR方法是更好的选择。

表5 目标的位置/m

编号	x^o	y^o	编号	x^o	y^o
1	400	300	5	-300	560
2	500	100	6	680	70
3	800	-100	7	-260	530

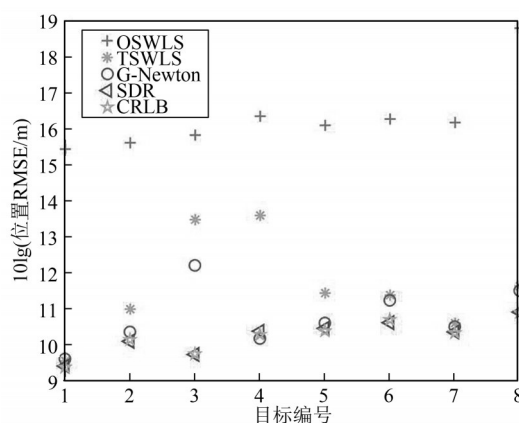


图3 目标位置变化对均方根估计误差的影响

4.3 传感器速度变化对均方根估计误差的影响

本文研究的目标定位模型中,传感器处于运动状态,所以传感器与目标之间产生的多普勒效应的显著程度也会影响系统的定位性能。因此本节分析了传感器速度变化对各算法估计误差的影响。目标和传感器的位置参数按前面第4.1节所述场景设置,且噪声值保持为-15;不同之处就在于传感器速度的变化,将其设置为 $\dot{s}_k = k \cdot \dot{s}$, k 表示步长。传感器速度变化对均方根估计误差的影响如图4所示,随着传感器速度的不断增大,传感器与目标之间产生的多普勒效应越来越显著,使得各算法的性能逐渐提升。然而,由于OSWLS没有变量间的约束限制,其性能始终无法接近CRLB精度,TSWLS则利用第一阶段的粗略解和估计误差获得更加精确的解,从而性能有

明显提升。从图4中可知,当 k 在 $[0.2, 2]$ 变化时,SDR方法的RMSE从一开始的逐渐逼近到后面完全接近CRLB,性能表现良好;当 k 在 $[0.2, 0.8]$ 内波动速度较小时,TSWLS和G-Newton的估计误差接近,但都高于SDR算法的估计误差,说明两者的性能相对较差,而SDR算法对传感器速度变化不敏感,性能表现优秀。

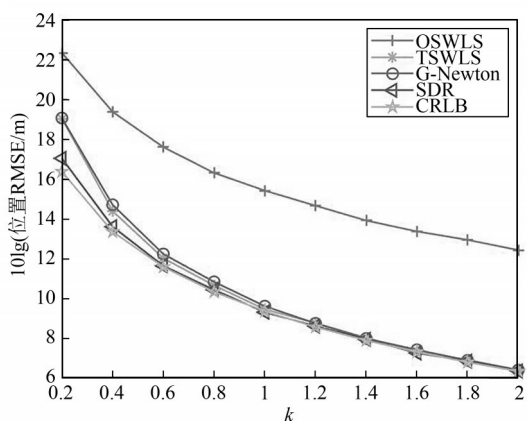


图4 传感器速度变化对均方根估计误差的影响

4.4 传感器数量变化对均方根估计误差的影响

通常情况下,传感器的数量也会影响定位的性能。使用更多的接收机可以更好地对抗噪声,同时意味着能够得到更高的定位精度。但是,在实际场景中,使用更多的接收器存在一定的局限性,不仅增加了定位系统的计算复杂性,而且在要求同步的情况下,难以对设备进行管理,导致成本增加。因此,本节对所提SDR算法和现有的WLS以及G-Newton在达到最佳定位精度时需要传感器的最小数量进行了研究。对此,不仅从表3和表4中选择不同数量的传感器参数,还额外添加了一个传感器,其位置以及速度参数分别为 $[-500, 500]^T$ 和 $[5, -10]^T$,以此验证各算法所需的最少传感器数量;此外,目标位置与第4.1节噪声变化场景保持一致,即 $\mathbf{u}^0 = [400, 300]^T$,并且噪声值与第4.2节相同,保持在 -15 。因此,传感器数量变化对均方根估计误差的影响如图5所示。从理论上分析,随着传感器数量的增加,各

个算法的RMSE会逐渐接近CRLB,从而达到最佳精度。但在仿真实验中,由于OSWLS和TSWLS方法无法实现严格的约束限制,当传感器数量小于15时,其性能都远远达不到CRLB精度;而牛顿迭代法表现最佳,其RMSE在传感器数量从10到17变化时始终接近CRLB。SDR算法与其相比,则稍微逊色,只有当传感器数量从11开始,SDR算法的RMSE开始逐渐逼近CRLB,直到传感器数量为14时,SDR算法就能够实现精准的目标定位,这是因为此时SDR算法中的矩阵 $\mathbf{G}$ 满足了列满秩这一条件,使得在较低的高斯噪声范围内,SDR算法的RMSE能够接近CRLB精度。综上所述,TSWLS达到最佳定位精度时至少需要16个传感器,SDP算法则至少需要14个。这说明所提出的SDR方法在真实的目标定位场景中即使使用相对较少的传感器时也可以提供良好的性能,从而节省了成本。因此所提SDR方法优于TSWLS算法。

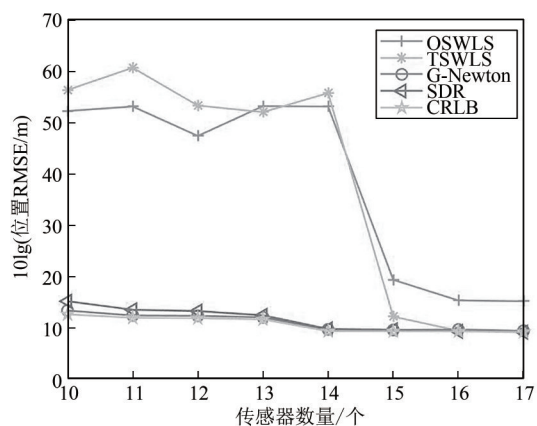


图5 传感器数量变化对均方根估计误差的影响

5 结束语

本文研究了在静态目标定位场景下,仅利用到达频率差测量(FDOA)方法估计未知目标位置的问题。通过引入辅助变量将高度非线性的方程转化为伪线性方程,由此构造一个带约束的加权最小二乘问题,然后利用半正定松弛(SDR)



方法得到一个半正定规划 (SDP) 问题, 由此进一步精确对未知参数的估计。就计算复杂度而言, TSWLS 算法的计算量远小于 SDR 方法, 更具有吸引力。但是从仿真分析来看, 在较高的高斯噪声水平范围内, 随着噪声逐渐增大, TSWLS 方法的性能无法达到克拉美罗下界; 与此同时, TSWLS 的局限性还在于它需要额外的传感器才能正常工作, 增加了一定的成本。而 SDR 算法在使用较少的传感器时, 其定位性能要比 TSWLS 算法优秀, 且对于传感器速度变化不敏感, 对几何形状具有较高的鲁棒性。在未来的工作中, 希望将所提出的方法推广到动态源定位问题当中, 实现更高精度的定位效果。

参考文献:

- [1] FEI Z S, LI B, YANG S S, et al. A survey of multi-objective optimization in wireless sensor networks: metrics, algorithms, and open problems[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017, 19(1): 550-586.
- [2] 吴晓平, 华宇婷, 胡军国, 等. 无线传感器网络中的线性移动目标运动参数捕获方法[J]. *传感技术学报*, 2018, 31(3): 463-470.
WU X P, HUA Y T, HU J G, et al. Capturing method of motion parameters for linear moving target in wireless sensor networks[J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2018, 31(3): 463-470.
- [3] SHI Q, CUI X W, ZHAO S H, et al. Sequential TOA-based moving target localization in multi-agent networks[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(8): 1719-1723.
- [4] 徐城旭, 吴晓平, 王国英, 等. 基于 TDOA 方法的无线传感器网络运动参数估计方法[J]. *传感技术学报*, 2019, 32(10): 1556-1562.
XU C X, WU X P, WANG G Y, et al. Time difference of arrival based estimation method for motion parameters in wireless sensor networks[J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2019, 32(10): 1556-1562.
- [5] WANG G, HO K C, CHEN X J. Bias reduced semidefinite relaxation method for 3-D rigid body localization using AOA [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021(69): 3415-3430.
- [6] KETABALIAN H, BIGUESH M, SHEIKHI A. A closed-form solution for localization based on RSS[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(2): 912-923.
- [7] LIN Q M, MAO X T, WU X P. Moving object localization in distributed MIMO with clock and frequency offsets[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2023, 23(13): 14746-14757.
- [8] NUHOGLU M A, KEMAL ALP Y, BAYRI A, et al. A new iterative method for passive Doppler geolocation based on semidefinite programming[C]//*Proceedings of the 2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. Piscataway: IEEE Press, 2021: 1812-1816.
- [9] 张杰, 王刚. 无线传感器网络中基于 TDOA/FDOA 的增强半正定松弛定位算法研究[J]. *传感技术学报*, 2018, 31(12): 1912-1918.
ZHANG J, WANG G. Enhanced semidefinite relaxation method for TDOA/FDOA-based source localization in wireless sensor networks[J]. *Chinese Journal of Sensors and Actuators*, 2018, 31(12): 1912-1918.
- [10] MAHMED M, HO K C, WANG G. 3-D target localization and motion analysis based on Doppler shifted frequencies[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2022, 58(2): 815-833.
- [11] LIN D Y, WANG G, HO K C. Source localization by frequency measurements in unknown signal propagation speed environments[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(4): 3953-3970.
- [12] WENG Y, XIAO W D, XIE L H. Total least squares method for robust source localization in sensor networks using TDOA measurements[J]. *International Journal of Distributed Sensor Networks*, 2011, 7(1): 172902.
- [13] HO K C. Bias reduction for an explicit solution of source localization using TDOA[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(5): 2101-2114.
- [14] LI J Z, GUO F C, JIANG W L. A linear-correction least-squares approach for geolocation using FDOA measurements only[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2012, 25(5): 709-714.
- [15] HO K C, XU W W. An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2453-2463.
- [16] WANG Y L, WU Y. An efficient semidefinite relaxation algorithm for moving source localization using TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(1): 80-83.
- [17] NOROOZI A, OVEIS A H, HOSSEINI S M, et al. Improved algebraic solution for source localization from TDOA and FDOA measurements[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2018, 7(3): 352-355.

- [18] ZOU Y B, LIU H P, WAN Q. An iterative method for moving target localization using TDOA and FDOA measurements[J]. IEEE Access, 2017(6): 2746-2754.
- [19] CHAN Y T, YAU CHIN HANG H, CHING P C. Exact and approximate maximum likelihood localization algorithms[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2006, 55(1): 10-16.
- [20] ZHANG Y, HO K C. Multistatic moving object localization by a moving transmitter of unknown location and offset[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2020(68): 4438-4453.
- [21] WANG G, ZHENG R C, HO K C. Elliptic localization of a moving object by transmitter at unknown position and velocity: a semidefinite relaxation approach[J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2023, 22(5): 2675-2692.
- [22] PEI Y H, LI X, YANG L, et al. A closed-form solution for source localization using FDOA measurements only[J]. IEEE Communications Letters, 2023, 27(1): 115-119.
- [23] LI Y F, WANG G. Multistatic localization with unknown transmitter position and signal propagation speed[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2022(29): 1427-1431.
- [24] WU X, MAO X, QI H. Semidefinite Relaxation for Moving Target Localization in Asynchronous MIMO Systems[J]. IEEE Transactions on Communications, doi: 10.1109/TCOMM.2023.3326492.
- WU X P, MAO X T, QI H N. Semidefinite relaxation for moving target localization in asynchronous MIMO systems[J]. IEEE Transactions on Communications, 2024, 72(2): 1075-1089.
- [25] WU X P, SHEN Y N, ZHU X F, et al. Semidefinite programming solutions for elliptic localization in asynchronous radar networks[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(4): 3385-3398.

[作者简介]



毛晓婷 (2000-), 女, 湖州师范学院信息工程学院硕士生, 主要研究方向为无线传感器网络、最优化理论和MIMO雷达定位。



吴晓平 (1977-), 男, 博士, 湖州师范学院信息工程学院副教授、硕士生导师, 主要研究方向为物联网、通信与信号处理、普适移动计算等。